

# AS MARAVILHOSAS UTILIDADES DA GEOMETRIA

DA PRÉ-HISTÓRIA À ERA ESPACIAL

ADALBERTO RAMÓN VALDERRAMA GERBASI



 PUCPRESS



ADALBERTO RAMÓN VALDERRAMA GERBASI

AS **MARAVILHOSAS**  
**UTILIDADES** DA  
**GEOMETRIA**  
DA PRÉ-HISTÓRIA À ERA ESPACIAL



PUCPRESS  
Curitiba  
2019

© 2017, Adalberto Ramón Valderrama Gerbasi  
2017, PUCPRESS  
2019 – 1ª reimpressão

Este livro, na totalidade ou em parte, não pode ser reproduzido por qualquer meio sem autorização expressa por escrito da Editora.

**Pontifícia Universidade Católica do Paraná  
(PUCPR)**

**Reitor**

Waldemiro Gremski

**Vice-reitor**

Vidal Martins

**Pró-Reitora de Pesquisa e Pós-Graduação**

Paula Cristina Trevilatto

**Conselho Editorial**

Auristela Duarte de Lima Moser

Cilene da Silva Gomes Ribeiro

Eduardo Biacchi Gomes

Evelyn de Almeida Orlando

Jaime Ramos

Léo Peruzzo Júnior

Rodrigo Moraes da Silveira

Ruy Inácio Neiva de Carvalho

Vilmar Rodrigues Moreira

**Editora Universitária Champagnat**

**Coordenação**

Michele Marcos de Oliveira

**Editor**

Marcelo Manduca

**Editora de arte**

Solange Freitas de Melo Eschípio

**Administrativo**

Larissa Conceição

**Preparação de texto**

Bruno Pinheiro Ribeiro dos Anjos

**Revisão**

Susan Cristine Trevisani dos Reis

**Capa, projeto gráfico e diagramação**

Solange Freitas de Melo Eschípio

**Editora Universitária Champagnat**

Rua Imaculada Conceição, 1155 – Prédio da Administração – 6º andar  
Câmpus Curitiba – CEP 80215-901 – Curitiba (PR) – Tel (41) 3271-1701  
editora.champagnat@pucpr.br – www.editorachampagnat.pucpr.br

**Dados da Catalogação na Publicação**

Pontifícia Universidade Católica do Paraná  
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/PUCPR – Biblioteca Central

G361m  
2017

Gerbasi, Adalberto Ramón Valderrama  
As maravilhosas utilidades da Geometria / Adalberto Ramón Valderrama  
Gerbasi. – Curitiba : PUCPRESS, 2017.  
216 p. il; 23 cm

ISBN 978-85-68324-34-9  
Inclui bibliografias

1. Geometria. 2. Matemática. I. Título.

CDD 20. ed. – 516

# DEDICATÓRIA

*Ao passado: meus pais Pascual<sup>†</sup> e Isabel<sup>†</sup>.*

*Ao presente: Sandra, Kátiusca e Marjorie.*

*Ao futuro: meus netos.*

*A Campo Elías, minha cidade natal.*

*A Boconó, cidade onde estudei no Liceu Juan Bautista Dalla Costa  
e ao grande professor de Matemática e amigo Numa Torres<sup>†</sup>.*



# AGRADECIMENTOS

*A Deus.*

*À bondade da família de um homem de 43 anos que, ao morrer, proporcionou-me a vida.*

*A minha esposa, pela paciência e sugestões na elaboração do texto.*

*A minha amiga e colega Profa. Dra. Marta Bellini da Universidade Estadual de Maringá, pela valiosa colaboração.*

*Aos prefaciadores Prof. Mario Olivero Marques da Silva – PhD e Profa. Dra. Magda Aparecida Salgueiro Duro.*

*Agradeço também a todo o pessoal da Editora PUCPress pelo esforço para a edição do livro, ao analista de conteúdo Prof. Dr. Manuel de Campo Almeida e a todos que direta ou indiretamente me auxiliaram para que este livro se tornasse uma realidade.*



*Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.*

*Hermann Hankel*







# SUMÁRIO

Primeiro Prefácio .....	11
Segundo Prefácio .....	13
Apresentação .....	15
I. Origem e Desenvolvimento da Geometria .....	19
II. Geometria Grega .....	59
III. Os Três Problemas Clássicos da Antiguidade .....	73
IV. Cônicas .....	83
V. Espirais e Rosáceas .....	121
VI. Curvas Cíclicas .....	155
VII. Catenária .....	181
VIII. Curva Normal .....	195
Considerações Finais .....	204
Glossário .....	206
Índice Onomástico .....	212



# PRIMEIRO PREFÁCIO

Passam gerações e gerações de alunos e professores, as estratégias de ensino são renovadas, até a própria Matemática se apresenta vestida por uma moderna linguagem. No entanto, uma pergunta não quer calar e persiste: para que serve isto?

Sempre que esta pergunta é formulada em uma aula de Matemática ou mesmo em alguma situação menos formal na qual se trata de Matemática, uma oportunidade maravilhosa se apresenta e não deve ser desperdiçada. É preciso que a resposta encante o questionador e, para isto, demanda de quem responde, além do conhecimento, um pouco de arte. A resposta deve ser clara, recheada de conteúdo, com uma equilibrada dose de detalhes técnicos. Se esta resposta atizar a curiosidade de quem perguntou, se lá deixar um *gostinho de quero mais*, então o êxito foi completo.

Este livro faz exatamente isto: responde a várias questões do tipo – Para que serve isto? – sobre importantes temas da Geometria.

A sua leitura corresponde a uma jornada cheia de aventuras e deslumbramentos. A história é apresentada sob a perspectiva da Geometria desde o período do Antigo Egito e de outras antigas civilizações até a modernidade.

Nos primeiros capítulos, ficamos sabendo como a Geometria floresceu nas antigas civilizações e podemos perceber que os aspectos práticos eram tão relevantes quanto a perspectiva estética e artística já naqueles dias. É bom lembrar que a fundamentação teórica dada à Geometria pelos gregos antigos, desde o seu próprio nome, estabeleceu a maneira como nós fazemos Matemática até hoje e isto é muito bem apresentado.

Um dos aspectos mais relevantes da nossa relação com a Matemática, na minha opinião, é a maneira como os problemas – as questões matemáticas – nos afetam. Os problemas são as molas propulsoras que fazem a Matemática avançar, se desenvolver. Um exemplo clássico é o fascínio exercido sobre gerações de matemáticos – profissionais e amadores – pelo chamado *Teorema de Fermat*, que mais propriamente seria chamado *Conjectura de Fermat*, até sua completa resolução dada por Andrew Wiles, com a colaboração de Richard Taylor. Muito bem, o terceiro capítulo deste livro aborda com propriedade três clássicos problemas que muito demandaram dos matemáticos e muito fizeram para o próprio

desenvolvimento da Matemática. Basta citar um deles: a quadratura do círculo ou, como diria Leporello, *il quadro non è tondo*.

A partir do quarto capítulo você já estará plenamente convencido tanto da beleza quanto da utilidade da Geometria e seguirá em curvas verdadeiramente estonteantes. Um capítulo dedicado às Cônicas revelará como os conteúdos matemáticos, a despeito de seu caráter abstrato, e mesmo devido a isto, afloram nas questões práticas, tanto na tecnologia quanto na natureza. Por exemplo, a parábola, que nada mais é do que "o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto dado, o foco, e de uma reta dada, a sua diretriz", é usada para a construção de antenas e até mesmo um forno solar.

O autor deixa o melhor para o final. Os últimos capítulos trazem um conteúdo bem pouco explorado nas publicações que tratam de temas semelhantes e preenche uma lacuna que já persiste há um bom tempo. Curvas menos conhecidas como espirais, certas curvas cíclicas e a chamada catenária são apresentadas com suas histórias e aplicações de maneira cuidadosa e bem ilustrada.

Enfim, leitor, você tem em mãos uma obra que claramente foi escrita com grande dedicação e muita competência e que certamente lhe deixará por muito tempo aquele já mencionado *gostinho de quero mais!*

**Prof. Mario Olivero Marques da Silva - PhD**  
Universidade Federal Fluminense (UFF)

# SEGUNDO PREFÁCIO

Ao longo da evolução humana a busca por resposta é sempre uma constante, sendo potencializada pela curiosidade intensa e pelo espírito científico de algumas pessoas. A representação gráfica sempre foi uma forma de comunicação entre as pessoas. Esta expressão de ideias pode ser encontrada em diversas formas por todas as civilizações na História e no decorrer dos anos. A matemática sempre terá uma importância significativa no cotidiano do ser humano, que sempre procurou representar os números para poder buscar uma forma de realizar registros e quantificar tudo que tinha relevância.

Na antiguidade os matemáticos se sentiam desafiados, a busca por respostas e pelo conhecimento possibilitou que as civilizações se desenvolvessem e deixassem para o futuro um legado de valor inestimável. A Geometria trouxe um diferencial desenvolvimentista e os seus diversos registros deixados pelas civilizações propiciaram a compreensão de parte da história da evolução humana. A obra traz características marcantes para a compreensão do desenvolvimento da Matemática, em especial da Geometria, no que tange à importância desta ciência exata na evolução da humanidade.

Ao compreender a Natureza, o homem busca entender sua própria existência e encontra inspiração para a solução de problemas de diversas áreas. É por meio da observação do seu comportamento e da compreensão de como ela constrói a sua diversidade, que ela própria responde diversas questões importantes que surgiram no longo caminho do desenvolvimento da humanidade.

O primeiro capítulo traz informações sobre o desenvolvimento da Geometria desde a antiguidade, fundamentado nas necessidades encontradas pela civilização, e como esta ciência se desenvolveu ao longo dos anos. As ilustrações de registros encontrados e a busca por diversas outras respostas por meio das referências ali indicadas, permitem ao leitor um riquíssimo conhecimento do objetivo desejado já nessas primeiras páginas da obra.

A Geometria Grega é o tema do segundo capítulo, nele encontra-se um riquíssimo conhecimento sobre os grandes matemáticos que possibilitaram o início das deduções da Geometria como a conhecemos hoje, além de desafiar e viabilizar o desenvolvimento e a busca da compreensão dessa ciência.

O leitor é desafiado pelo conhecimento dos três problemas clássicos da antiguidade no terceiro capítulo. Não há limites para a busca das respostas desejadas.

Hoje, a facilidade e a rapidez em buscar um conhecimento já consolidado permite que a troca de ideias se faça de uma forma bastante ágil. O capítulo desafia o leitor a encontrar as soluções referentes aos problemas hoje apresentados pela necessidade do cotidiano.

As Cônicas, tema abordado no capítulo quatro, bastante relevante para a compreensão da Geometria, possibilitam compreender suas representações e formas de construção, incentivando e estimulando, ainda hoje, a criatividade para construções civis, trazendo o entendimento de fenômenos físicos existentes na natureza.

Estimulando ainda mais a observação do meio ambiente, o quinto capítulo exhibe a grande capacidade humana de desenvolver o conhecimento e a criatividade, possibilitando o desenvolvimento de tecnologias e, dessa forma, trazendo soluções incríveis para o cotidiano. Permite, também, o desenvolvimento da ciência em diversas áreas do saber.

Partindo de incríveis abstrações geométricas, o sexto capítulo registra observações meticolosas e suas formas de existência em áreas como a de sinais de comunicação e suas representações.

Com foco em um tema de grande relevância à Geometria, a catenária, o capítulo sete chama atenção para a existência desta função, possibilitando a observação da sua ocorrência em diversos fenômenos.

Buscando trazer a compreensão de como o ser humano procurava entender os desafios dos diversos jogos e quais suas possibilidades e chances de ganho, o capítulo oito traz a compreensão dessa ciência que trouxe rico conhecimento para a humanidade.

Esta é uma obra de grande relevância para alunos, professores e amantes da Matemática, em especial aos géometras. Poder ter lido a obra representou, para mim, um presente. Ela incentiva página a página a sua leitura e estimula todos os leitores a compreender a Geometria como fator que influencia a existência humana e o desenvolvimento de seus campos de conhecimento e deixar para as futuras gerações um legado cada vez melhor.

**Profa. Dra. Magda Aparecida Salgueiro Duro**

Universidade Presbiteriana Mackenzie

# APRESENTAÇÃO

A ideia de escrever este livro nasceu de um fato ocorrido quando eu cursava o 2º ano do Ensino Médio e, em determinada aula, o professor de matemática nos solicitou que abríssemos o famoso livro *Tábua de Logaritmos*, de Edward S. Allen. Folheando o livro, vi que nele apareciam equações e seus gráficos. Ao fim da aula, perguntei-lhe se estudaríamos aquela matéria e qual era a utilidade dela. Para minha surpresa, ele respondeu que aquelas equações não faziam parte do nosso estudo e não adiantaria dar uma explicação, pois eu não entenderia, e que eu deveria esperar para quando ingressasse na universidade, onde as estudaria na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Como sempre admirei a matemática, decidi que este era o curso que eu desejava para minha vida pessoal e profissional. Contudo, mesmo tendo cursado Matemática, ao dar aulas percebi que ainda faltava algo. Algo que pudesse servir como instrumento útil para a vida dos professores e dos alunos.

Um de meus objetivos ao conceber este livro é que eles não se esquecessem de que:

a beleza é para ser apreciada e gozada e não ensinada e aprendida. O ensino da matemática, por seu valor estético, é algo que será absorvido pelos alunos de modos muito diferentes, em circunstâncias também diferentes e muitas vezes inesperadas. É uma beleza que resulta da apreciação, sensibilidade e, por conseguinte, de estados emocionais diversos. É o resultado de atividades descontraídas, de lazer, tais como a apreciação da natureza, de objetos de arte etc. Pode-se aprimorar essa apreciação através de estudos de disciplinas como geometria do sagrado, astronomia, aritmética e geometria mística, talvez associada ou com referência a estudos da história da arte e da religião. (D'AMBROSIO, 1998).

Sei que perguntas sobre a utilidade da Matemática – principalmente da Geometria – em sala de aula são frequentes e geralmente não são respondidas pelos professores. Quando eles o fazem, suas respostas não mitígam a curiosidade dos alunos, criando desinteresse e antipatia por esse ramo da matemática.

Diante disso, senti que era necessário saber mais sobre a Geometria e aprender como ela influencia nossas vidas e o mundo que nos rodeia. Durante anos, reuni material bibliográfico por meio de livros didáticos, paradidáticos, revistas e outros recursos, como os disponíveis na Internet, com o propósito de obter



informações, fotografias e imagens de alta qualidade. Elaborei os gráficos relativos às equações ou funções das curvas estudadas, desenhados com softwares específicos para matemática, dentre eles, o software livre *Winplot*. Ao fim do livro, acrescentei um glossário para facilitar a compreensão dos conceitos e dos termos técnicos utilizados.

Como seres racionais que somos, temos sede por descobrir coisas novas, compreender melhor o mundo, o universo e nosso lugar neles.

Podemos nunca descobrir uma nova estrela ou uma nova espécie no reino animal ou vegetal, mas podemos descobrir as maravilhas do mundo que nos cerca e que estão presentes em nossa realidade, e muitas vezes, até dentro de nós. A Geometria nos proporciona isso, através de suas figuras planas e de suas formas sólidas.

Assim, ao escrever este livro, eu quis que ele possibilitasse uma leitura leve e prazerosa, sem grandes aprofundamentos em teoremas ou demonstrações. Quis que os conceitos envolvidos fossem apresentados de forma simples, e as questões matemáticas evitadas, na medida do possível, exceto quando de suma importância. Tentei levar em conta um dos objetivos da Geometria: sua natureza prática na resolução de problemas que contribuem com o desenvolvimento do raciocínio e da lógica. Ao pensar, desenvolvemos intuitivamente ideias para compreender a nossa realidade. Em Geometria, essas ideias são: o ponto, a reta, o plano, o ângulo, a curva e a superfície. Ao olharmos uma estrela no céu, temos a noção de *ponto*. Das cordas de um violão surge a ideia de *reta*, que em Geometria se imagina sem espessura, sem começo nem fim, e ilimitada nos dois sentidos. A ideia de *plano* surge ao olharmos uma folha de caderno, uma quadra de vôlei ou a superfície de uma piscina, embora o plano seja concebido sem fronteiras e ilimitado em todas as direções. Ao consultarmos o relógio, vemos que os ponteiros farão entre si um *ângulo* que varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . No canto entre duas paredes observaremos ângulos de  $90^\circ$ . A *curva* encontra-se presente no contorno circular do Sol e da Lua, nas rodas de veículos, nas moedas etc. Podemos visualizar as *espirais* na flor do girassol, nas folhas da begônia caracol etc. Já as *superfícies* podem ser observadas no formato cilíndrico das latas para conservar alimentos, no formato do cubo do quebra-cabeça de *Rubik*, na forma esférica das bolas de basquete e de voleibol, na figura piramidal das pirâmides do Egito, no contorno da catenária no fundo das latas de refrigerante etc.

Se procurarmos a definição para a palavra *geometria*, possivelmente encontraremos que esta é um ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria plana) e dos sólidos (geometria no espaço). Contudo, algumas perguntas não podem ser respondidas apenas com a definição. Por exemplo: o que é Geometria? Quando e onde surgiu? Como e por quê? O que ela estuda?

Qual é sua utilidade? Que benefícios ela nos traz? Foi pensando em responder a essas questões e auxiliar a professores, alunos e leigos, que este livro foi concebido.

Ele apresenta, no primeiro capítulo, um estudo detalhado sobre a origem e o desenvolvimento da Geometria em diversos lugares e épocas, abrangendo os *processos de geração, organização e transmissão de conhecimento em diversos sistemas culturais* (D'AMBROSIO, 1998).

Os dois capítulos seguintes tratam da matemática, da geometria grega e dos três grandes problemas clássicos da Antiguidade, pois, como afirma D'Ambrosio (1998),

a Matemática é, desde os gregos, uma disciplina de foco nos sistemas educacionais, e tem sido a forma de pensamento mais estável da tradição mediterrânea que perdura até nossos dias como manifestação cultural que se impôs, incontestada, as demais formas enquanto nenhuma religião se universalizou, nenhuma língua se universalizou, nenhuma culinária nem medicina se universalizaram, a matemática se universalizou deslocando todos os demais modos de quantificar, de medir, de ordenar, de inferir e servindo de base, se impondo como modo de pensamento lógico e racional que passou a identificar a nossa própria espécie.

Os demais capítulos discorrem sobre as cônicas, as espirais e rosáceas, as curvas cíclicas, a catenária e a curva normal. O objetivo fundamental é a explicação de fenômenos presentes na natureza e também as aplicações concretas da Geometria, e para que isso fosse possível, foi necessário buscar conhecimento e apoio em outras áreas do conhecimento, como arquitetura, astronomia, anatomia, botânica, zoologia, física, probabilidade e engenharia, dentre elas, a civil, a mecânica, a elétrica, a eletrônica e a da computação.

Espero que a leitura lhe seja útil e agradável e que possa lhe ajudar a ampliar a fronteira de seus conhecimentos sobre a Geometria e do inter-relacionamento com outras ciências, e ainda que ela consiga fazer por você, leitor, o que alguns professores fizeram por mim: revelar a beleza, a riqueza e o poder da Geometria, permitindo que você entre nesse mundo mágico e fascinante, assim como eu entrei.

Se você acha que a Geometria é complicada e atemorizante, mas mesmo assim percebe que há algo nela que lhe encanta e vale a pena ser desvendado, então este livro foi escrito para você.

Boa leitura.



# 1. ORIGEM E DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA

Ao longo de milhares de anos, o homem foi adquirindo conhecimento em geometria, e é provável que este conhecimento tenha se iniciado em épocas muito remotas na Antiguidade, e, de forma bastante simples, aperfeiçoando-se gradativamente até atingir o estágio de desenvolvimento atual. Mesmo sendo o homem um ser primitivo, seu instinto o levou a ter ideias relacionadas à geometria, como a noção de distância, e também a comparar formas e tamanhos, e seu uso está vinculado ao período de tempo e ao lugar em que o homem pré-histórico viveu. Talvez sua curiosidade pela natureza o tenha levado a observar que nela existem muitas figuras geométricas, como a forma hexagonal nos alvéolos das colmeias construídas pelas abelhas, as estrelas marinhas, que possuem forma pentagonal, o formato circular da Lua e do Sol e o contorno cilíndrico dos troncos das árvores. Além de noções como vertical, paralela e perpendicular, que podem ter surgido pela construção de moradias e de muros.

A vida cotidiana pode ter levado o homem pré-histórico à percepção de curvas, superfícies e sólidos, como uma pedra que, arremessada no ar, descreve uma parábola, e se jogada sobre a superfície de um lago, descreve círculos concêntricos iguais aos que se observam no corte de um tronco de árvore; um cipó pendurado pelas extremidades entre duas árvores originam uma catenária; uma corda enrolada se parece com uma espiral; alguns frutos têm forma esférica; ovos de aves têm formato oval; folhas e flores ilustram a ideia de simetria; e a ideia de volume pode ter nascido da necessidade de se armazenar água, líquidos, cereais e outros produtos (EVES, 1992, p. 1-2).

A presente edição foi composta pela PUCPRESS e impressa em papel offset 90 gramas (miolo) e papel cartão 250 gramas (capa).

Com clareza pedagógica, o Professor Adalberto Ramón Valderrama Gerbasi apresenta a Geometria de forma cativante por meio de fenômenos da natureza e de realizações humanas realmente fantásticas. Dedicou cada capítulo a um tema: História e Desenvolvimento da Geometria; Geometria Grega; Os Três Problemas da Antiguidade; Cônicas; Espirais e Rosáceas; Curvas Cíclicas; Catenária e Curva Normal. O autor explica detalhadamente, de forma simples e objetiva, todos os capítulos, evitando apresentar demonstrações matemáticas, exceto quando estritamente necessárias. Ele abre uma porta para o jardim das curiosidades geométricas, fornecendo ao leitor informações que despertam a curiosidade. Com o livro, ele torna agradável e interessante os tópicos que antes eram temidos por professores, alunos ou leigos. Deste modo, o estudo, a compreensão e o aprendizado da Geometria tornam-se mais fáceis.

  
PUCPRESS

ISBN 978-85-68324-34-9



9 788568 324349